Hoja 8: Grafos

1. Representar los grafos cuya matriz de adyacencia se da a continuación y dar la matriz de incidencia.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Representar los grafos cuya matriz de incidencia se da a continuación y dar la matriz de adyacencia.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $e)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$d)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

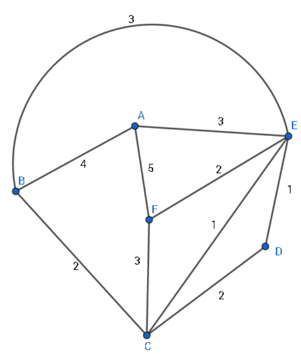
3. Dado los siguientes grafos:

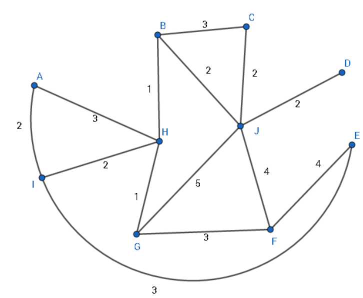
   i) Calcular un árbol abarcador mínimo por Prim y Kruskal.

   ii) Calcular un árbol abarcador máximo por Prim y Kruskal.

   iii) Realiza una búsqueda en profundidad y en anchura partiendo del vértice A hasta llegar al último (en el orden alfabético).

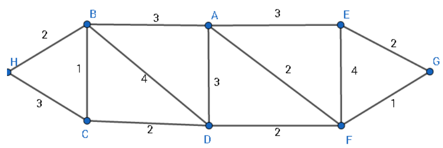
   iv) Repite la búsqueda en profundidad pero con la condición adicional de tomar los vértices de peso máximo.

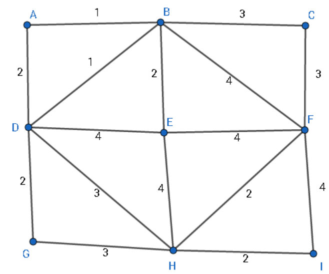




$b)$

$a)$





c) *d*)

4. Para los grafos de los ejercicios 1,2 y 3:

   a) ¿Son conexos?

   b) Calcular los grados de cada vértice y comprobar que se verifica el teorema que relaciona los grados con el número de aristas.

   c) Calcular, si es posible, un camino euleriano.

   d) Calcular, si es posible, un camino hamiltoniano.

5. Un grafo tiene 16 aristas y sus vértices tienen grado 3 ó 4. ¿Cuántos vértices de grado 3 y cuántos de grado 4 debe tener? Indica todas las soluciones posibles. ¿Existen grafos que, cumpliendo estas condiciones, tengan caminos de Euler? Dibuja un ejemplo.

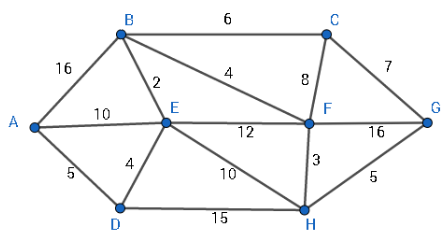
6. Si $G = (V, E)$ es un grafo conexo con $|E| = 17$ y $\deg(v) \geq 3$ para todo $v \in V$, ¿cuál es el valor máximo para $|V|$?

7. Un árbol ternario completo tiene 34 vértices internos. ¿Cuántas aristas tiene? ¿Cuántas hojas?

8. ¿Cuántos vértices internos tiene un árbol $5-$ario completo con 817 hojas?

9. Un aula tiene 25 ordenadores que deben conectarse a un enchufe de pared con cuatro salidas. Se hacen las conexiones mediante cables de extensión con cuatro salidas cada uno. ¿Cuál es el número mínimo de cables que se necesitan para poder utilizar todos los ordenadores?

10. En el grafo de la figura se representa una red ferroviaria donde la distancia entre cada par de ciudades se expresa en km:



Se quiere renovar la red ferroviaria de manera que el coste en km sea mínimo y que cada par de ciudades tenga conexión para tramos renovados. ¿Qué tramos deben renovarse?

11. El estudio de localización de terminales de ordenadores que van a ser instalados en una empresa viene dado por la siguiente tabla, donde los números representan el coste de instalar las conexiones entre los distintos terminales. El terminal C corresponde al ordenador principal y el resto de los terminales deben estar conectados a él mediante líneas telefónicas.

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \hline A & 0 & 2 & 5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 0 & 9 \\ C & 5 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ D & 10 & 0 & 11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 14 & 13 & 4 \\ F & 0 & 7 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 8 \\ G & 0 & 0 & 12 & 0 & 13 & 0 & 0 & 3 \\ H & 0 & 9 & 0 & 0 & 4 & 8 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Halla la manera en que todos los terminales estén conectados a C directa o indirectamente, siendo mínimo el coste total de la instalación.